УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.32838/2663-5941/2021.2-1/19

Дубко В.О.
Таврійський національний університет імені В.І. Вернадського

НЕКЛАСИЧНІ МОДЕЛІ СТОХАСТИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

У статті розглянуті моделі випадкових процесів, які відрізняються від традиційних. Вказана область їх застосування в процесі моделювання реальних процесів, явищ і систем, з урахуванням вимоги обмеження варіацій процесів. Сучасна теорія стохастичних диференціальних рівнянь забезпечує можливість моделювання стохастичних процесів обмеженої варіації не тільки в середньому, але і на їх реалізаціях. Ця можливість демонструється на прикладі орієнтованої ланцюга, зафіксованої в початковій точці. Сформульована теорема показує математичний зв'язок між моделями дискретного і неперервного ланцюжків. Наведені приклади появи перших інтегралів для стохастичних систем і зазначена можливість забезпечення стійкості притягаючого многовиду. Підкреслюється важливість та наводяться приклади застосування принципу Ланжевена в процесі побудови рівнянь стохастичної динаміки. Для моделі Ланжевена динаміки броунівської частинки з ортогональними випадковими впливами на її швидкість у режимі, коли модуль початкової швидкості руху частинки знаходиться на многовиді, який, як було встановлено раніше, притягуючий, наведено рівняння для щільності розподілу часток. Розглядаються особливості поведінки розв'язків цього рівняння залежно від співвідношення між коефіцієнтом стоксовського тертя і при вінерівських збуреннях, ортогональних до швидкості. Зазначено наявність коливальних процесів для ансамблю частинок. Наведено явний розв'язок характеристичної функції для щільності положення частинок. Показано, що спектр характеристичної функції містить області неперервних значень, де спостерігається коливні процеси, і область, де коливання відсутні. Ці результати підтверджують висновок про те, що модель динаміки броунівської частинки, яка побудована на основі нетрадиційного фізичного трактування рівнянь Ланжевена – стохастичних рівнянь з ортогональними впливами, призводить до трактування ансамблю броунівських часток як системи, що має властивості хвильовими. Продемонстровано роль вибору типу стохастичного диференціального рівняння, зокрема, Стратоновича, а не Іто, на прикладі виключення, пов'язаного з математичною моделлю Лоренца, парадоксу самоприскорення електрона, що взаємодіє з власним полем.

Ключові слова: *обмежені варіації, модель Лоренца, стохастичне рівняння, ортогональні впливи, орієнтований ланцюг.*

Постановка проблеми. Зміни реальних процесів, реальних середовищ, у тому числі і стохастичних, завжди пов'язані з обмеженнями на їхні варіації. Під час моделювання детермінованих явищ такі обмеження вводяться, наприклад, у формі законів збереження. Включення в розгляд невизначеності (відкритість системи) істотно змінює інтерпретацію моделей. На практиці обмеження для відкритої системи (ВС) формуються з використанням усереднених показників. Для реальних технічних і природних систем це призводить до того, що поняття ризику стає прийнятним: прийняття неминучості руйнування системи в непередбачений момент [7]. Це тупиковий шлях. Вихід може полягати в тому, що обмеження і для моделей ВС (систем, що знаходяться під впливом випадкових збурень, які порівняльні з величинами-показниками стану самої системи) мають бути пов'язані не тільки з усередненими характеристиками, але й з конкретними реалізаціями-подіями.

Дослідження в цьому напрямі виконувались нами в різний час, включно до поточного 2021 р. Публікувалися результати в різних виданнях, що ускладнює охоплення і критичний аналіз отриманих висновків.

Виклад основного матеріалу дослідження. У цій роботі наведені і розширені деякі наші результати, пов'язані з моделюванням стохастичних процесів обмеженої варіації (перша модель), існуванням невипадкового інваріанту (друга модель) для стохастичного процесу, вивченням динаміки ансамблю броунівських частинок, коли випадкові впливи ортогональні до їх швидкості (третя модель).

Четверта модель на прикладі рівняння Лоренца [18] взаємодії електрона з власним полем демонструє, як за рахунок вибору представлення стохастичного рівняння (інтерпретації процесу що моделюється) виникає можливість «виключити» парадокс самоприскорення електрона [14].

Нумерація формул – подвійна. Перша цифра – номер розділу, а друга – поточна нумерація формули в розділі.

1. Стохастичні процеси обмеженої варіації

Як приклад моделі процесу обмеженої варіації розглянемо таку систему рівнянь:

$$x(t)=\tilde{x}(t)-x(0)=\int_0^{L(t)}\alpha(u,t)\cos(\varphi(u,t))du, \quad (1.1а)$$

$$y(t)=\tilde{y}(t)-y(0)=\int_0^{L(t)}\alpha(u,t)\sin(\varphi(u,t))du, \quad (1.1в)$$

де $\alpha(u,t),\varphi(u,t)$ – випадкові скалярні полюси, $L(t)$ – функція, зв'язана з класом процесів, що моделюються. Покладаємо, що $\int_0^{L(t)}|\alpha(u,t)|^2du$ – обмежений.

Рівняння (1.1), коли $0<\alpha(u,t)\le c$; $L(t)=ct$, моделюють випадкове блукання в R^2, з обмеженою за величиною швидкістю, на поверхні або в тонкому прошарку, утворення тріщин у породах, рукавів дельти ріки.

Якщо $\alpha(u,t)>0$; $L(t)=L,\forall t$, то рівняння (1.1) – модель зміни відстані $\mathbb{Z}(t)=(|x(t)|^2+|y(t)|^2)^{0.5}$ між кінцями нитки (струни), полімерних ланцюгів (зміни розміру глобули) в R^2.

Дискретна аналогія моделі (1.1) – це об'єднання процесів обертальної дифузії для послідовно з'єднаних ланок у R^2:

$$\begin{aligned}x_n(l;t)&=\sum_{s=1}^{n}\alpha(l_s;t)\cos\varphi_s(t)\cdot\Delta_s\\ y_n(l;t)&=\sum_{s=1}^{n}\alpha(l_s;t)\cos\varphi_s(t)\cdot\Delta_s\end{aligned} \quad (1.2)$$

де $\alpha(l_s;t)$, $\varphi_s(t)$ – випадкові процеси; $l_1<l_2<...\le l$, $\sum_{s=1}^{n}\Delta_s=const$.

На відміну від моделей, що досліджувалися іншими авторами, специфікою (1.2) є <u>залежність повороту</u> поточної ланки від попередньої. Це дало підставу трактувати такі послідовності як стохастичні, ієрархічно-скорельовані ряди (серії) [8, с. 7]. Зазначимо, що фіксація точки відліку на самому ланцюзі приводить до задач про динаміку щодо цієї точки двох незалежних відрізків.

Формули (1.1), (1.2) можемо розглядати і як модель вкладених вихорів при турбулентній дифузії, переносу пасивної домішки під їхньою дією (модель експансії).

Взаємозв'язок між (1.1) і (1.2) розглядався в роботі [6], для полів $\{x_N(l;t);y_N(l;t)\}$, $N\to\infty$, за додаткових умов:

$$\alpha(l;t)=\alpha(l)>0,\, l\in[0,L), \quad (1.3в)$$

$$\sum_{s=1}^{N}\alpha(l_s)\Delta\le const,\ \alpha(l)\in\mathbb{C}^1_{[0,L]},\Delta=L/N \quad (1.3в)$$

$$\varphi_k=\sum_{s=1}^{k}\eta(l_s,t)\Delta(w(l_s)),\ t\in[0,T), \quad (1.4)$$

$$\eta(l_s;t)=\int_0^t b(l_s;\tau)dw_s(\tau),\ b(l;t)\in\mathbb{C}^2_{[0,L]\times[0,T]} \quad (1.5)$$

де $\Delta(w(l_s)),\Delta w_s(\tau)$ – незалежні прирости (за випередженням) для незалежних $\forall s$ вінерівських процесів.

Теорема 1. [6]. За умови виконання вимог (1.3) – (1.5) послідовність (1.2) <u>слабо збігається</u>, при $N\to\infty$, до поля $\{x(l;t);y(l;t)\}$, компоненти якого є розв'язком задачі Коші для системи стохастичних диференціальних рівнянь Іто:

$$\begin{cases}d_lq(l;t)=\left[q(l;t)\frac{\partial}{\partial l}\ln\alpha(l)-\frac{1}{4}q(l;t)\int_0^t b^2(l;\tau)d\tau\right]dl+\\ \qquad +\left(\frac{1}{2}\int_0^t b^2(l;\tau)\right)^{1/2}p(l;t)dw(l)\\ d_lp(l;t)=\left[p(l;t)\frac{\partial}{\partial l}\ln\alpha(l)-\frac{1}{4}p(l;t)\int_0^t b^2(l;\tau)d\tau\right]dl-\\ \qquad -\left(\frac{1}{2}\int_0^t b^2(l;\tau)\right)^{1/2}q(l;t)dw(l)\end{cases}, \quad (1.6а)$$

$$d_lx(l;t)=q(l;t)dl,\ d_ly(l;t)=p(l;t)dl, \quad (1.6в)$$

$$x(0;t)=0,\quad y(0;t)=0,\quad p(0;t)=\alpha(0),\quad q(0;t)=0.$$

Зокрема, коли й $\alpha(l)=\alpha=c$ і $b(l;t)=b$ – постійні, то система (1.6а) переходить у таку:

$$\begin{cases}d_lp(l;t)=-\frac{1}{4}p(l;t)tb^2dl-\left(\frac{1}{2}tb^2\right)^{1/2}q(l;t)dw(l)\\ d_lq(l;t)=-\frac{1}{4}q(l;t)tb^2dl+\left(\frac{1}{2}tb^2\right)^{1/2}p(l;t)dw(l)\end{cases} \quad (1.7)$$

Розв'язок (1.7) має вигляд:

$$\begin{aligned}p(l;t)&=c\cos(w(l)\left(\frac{1}{2}tb^2\right)^{1/2}),\\ q(l;t)&=c\sin(w(l)\left(\frac{1}{2}tb^2\right)^{1/2}),\end{aligned} \quad (1.8а)$$

Отже, через (1.6в),

$$\begin{aligned}x(l;t)&=c\int_0^l\cos(w(u)\left(\frac{1}{2}tb^2\right)^{1/2})du,\\ y(l;t)&=c\int_0^l\sin(w(u)\left(\frac{1}{2}tb^2\right)^{1/2})du,\end{aligned} \quad (1.8в)$$

Якщо $l=ct$, то доходимо співвідношень:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = c\int_0^{tc} \cos(w(u)\left(\frac{1}{2}t\sigma^2\right)^{1/2})du, \\ \tilde{y}(t) = c\int_0^{tc} \sin(w(u)\left(\frac{1}{2}t\sigma^2\right)^{1/2})du. \end{cases} \quad (1.9)$$

Рівняння (1.9) отримано за умови, що початкова «швидкість» (1.8а) спрямована уздовж осі x. У загальному випадку коли $\varphi_0 \neq 0$, як випливає з (1.1), і при початкових значеннях відмінних від 0,

$$\tilde{x}(t) = \cos(\varphi(0))x(t) - \sin(\varphi(0))y(t) + x(0),$$

$$\tilde{y}(t) = \cos(\varphi(0))y(t) + \sin(\varphi(0))x(t) + y(0),$$

де $x(t)$ і $y(t)$ визначаються (1.8в).

Повернемося до рівнянь (1.6), яке представимо таким чином:

$$\begin{cases} d_l p(l;t) = p(l;t)a(t;l)dl - q(l;t)\overline{b}(t;l)dw(l) \\ d_l q(l;t) = q(l;t)a(t;l)dl + p(l;t)\overline{b}(t;l)dw(l) \end{cases},$$

$$d_l x(l;t) = q(l;t)dl, \; d_l y(l;t) = p(l;t)dl,$$

де

$$a(t;l) = \left[\frac{\partial}{\partial l}\ln\alpha(l) - \frac{1}{4}\int_0^t b^2(l;\tau)d\tau\right],$$

$$\overline{b}(t;l) = \left(\frac{1}{2}\int_0^t b^2(l;\tau)\right)^{1/2}, \quad (1.10)$$

Скориставшись формулою Іто, знаходимо:

$$d_l p^2(l;t) = 2p^2(l;t)a(t;l)dl + q^2(l;t)\overline{b}(t;l)dl - $$
$$- 2q(l;t)p(l;t)\overline{b}(t;l)dw(l),$$
$$d_l q^2(l;t) = 2q^2(l;t)a(t;l)dl + p^2(l;t)\overline{b}(t;l)dl + $$
$$+ 2q(l;t)p(l;t)\overline{b}(t;l)dw(l).$$

Просумуємо ці рівняння:

$$d_l(p^2(l;t) + q^2(l;t)) =$$
$$= (p^2(l;t) + q^2(l;t))[2a(t;l) + \overline{b}^2(t;l)]dl.$$

Розв'язок цього рівняння такий:

$$(p^2(l;t) + q^2(l;t)) =$$
$$= (p^2(0;t) + q^2(0;t))\exp[\int_0^l \; [2a(t;u) + \overline{b}^2(t;u)]du$$

Для постійних α і b з урахуванням (1.10),

$$(p^2(l;t) + q^2(l;t)) =$$
$$= c^2 \exp[2^{-1}l(-\sigma^2 + \sigma^2)] = c^2, \forall t \geq 0, \forall l \leq L.$$

2. Існування керуючих параметрів, що забезпечують збереження і стійкість вибраних показників.

Важливим є питання, яке пов'язане з теорією керування: побудова керуючих параметрів, що забезпечують збереження, стійкість конкретних функціоналів-показників від керованих змінних (існування областей, що притягають). Причому закони розподілу збурень не обов'язково мають бути відомі.

Розглянемо рівняння

$$dx(t;\lambda) = [-\mu(t)E + \frac{1}{2}F]x(t;\lambda)dt +$$
$$+ dw(t)a(t)\sum_{k=1}^{3} B_k(t)x(t;\lambda), \quad (2.1)$$

де B_k – матриці групи поворотів у R^3, E – одинична матриця і

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для цього рівняння можуть існувати многовиди, що притягають, незважаючи на те, що вінерівський процес $w(t)$ – це процес, що допускає які завгодно великі варіації.

Загальний вигляд розв'язку (2.1) у припущенні, що його коефіцієнти забезпечують умови існування та єдиності розв'язку, такий [5]:

$$x(t;\lambda) = f(t)P(t)x(0;\lambda),$$

$$\text{де } f(t) = \exp\{\int_0^t \left(a^2(\tau) - \mu(\tau)\right)d\tau\},$$

$$P(t) = \left[E + \frac{\sin(|z(t)|)}{|z(t)|}q(t)\sum_{k=1}^{3} B_k + \right.$$
$$\left. + \frac{2\sin^2\left(\frac{1}{2}|z(t)|\right)}{|z(t)|^2}\left(q(t)\sum_{k=1}^{3} B_k\right)^2\right],$$

$$z^2(t) = 3\left(q(t)\right)^2, \; q(t) = \int_0^t a(\tau)dw(\tau).$$

Можемо переконатися, що $|x(t;\lambda)|$ – невипадкова величина:

$$|x(0;\lambda)|\exp\{\int_0^t \left(a^2(\tau) - \mu(\tau)\right)d\tau\} = |x(t;\lambda)|.$$

Якщо $a(t)$ і $\mu(t)$ розглядати як керуючі параметри, то при такому їх виборі: $a^2(t) = \mu(t)$, $|x(0;\lambda)| = |x(t;\lambda)|, \forall t \geq 0$. Тобто відбувається рух на сфері.

У разі складнішої залежності керуючих параметрів можливе виникнення множини областей, що притягають та перемежовуються областями нестійкості.

У попередній моделі закон збурення був відомий. Як приклад, що пояснює і підтверджує можливість існування детермінованих функціоналів, коли закони збурень процесу не обов'язково відомі, розглянемо такий процес:

$$x(t,\lambda) = \exp\{\sum_{k=1}^{m} \xi_k(t) B_k(t;\lambda)\} g(t;\lambda)$$

де $B_k(t;\lambda) = -B_k^*(t;\lambda)$ (* – знак транспонування) – матриці $n \times n$, $\xi_k(t)$ випадкові скалярні процеси; $x(t,\lambda), g(t;\lambda)$ – векторні процеси в R^n, $\lambda \in D_0 \subset R^{n'}$. Скалярний добуток $(x(t,\lambda), x(t,\lambda)) = (g(t;\lambda), g(t;\lambda))$, як можна переконатися, не залежить від характеру збурень $\xi_k(t)$ [5].

Прикладом подібної стійкості може служити здатність природного середовища не тільки повертатися, але і знаходитися в області визначених показників за умови постійно діючих випадкових збурень.

3. Некласична модель броунівського руху [7].

Ключовою властивістю, що призводить на макроскопічному рівні до дифузійного переносу речовини, є хаотичний характер руху кожної частки. Математичну модель динаміки частинки будемо досліджувати, спираючись на стохастичне рівняння Іто:

$$\varepsilon d\mathrm{v}_j(t) = -a(x(t),t)\mathrm{v}_j(t)dt + f_j(x(t),t)dt + \\ + \sum_{k=1}^{m} b_{j,k}(x(t),\mathrm{v}(t),t)dw_k(t), \quad (3.1) \\ dx(t) = \mathrm{v}(t)dt.$$

де $\mathrm{v}(t)$ – швидкість броунівськой частки, $x(t)$ – її поточне положення, $a(\cdot) > 0$ – макропараметр, що відіграє роль в'язкості середовища, $dw_k(t)$ – прирости за випередженням щодо поточного моменту t, незалежних вінерівських процесів $w_k(t)$, $\varepsilon > 0$ – скалярний параметр.

Рівняння (3.1) назвають рівнянням Ланжевена [17]. Включення випадковості розглядається як метод, що дає змогу замінити безліч взаємодій із навколишніми системами ефективними випадковими процесами, що забезпечать виконання принципу узгодженості Ланжевена: *вимога співпадіння осреднених значень характеристик на мікрорівні, з відповідними аналогами на макрорівні*. Ця умова призводить до необхідності взаємозв'язку між $a(\cdot)$ і коефіцієнтами $b_{j,k}(\cdot)$ в (3.1).

Основна проблема теорії броунівського руху – обґрунтування переходу від динамічного опису руху броунівської частинки в просторі швидкостей і координат до опису явища дифузії тільки в просторі координат (перехід до дифузійного наближення). Загальний математичний висновок такий: перехід до скороченого опису вдається здійснити на основі моделей (3.1), коли $\varepsilon \to 0$ ([2], [3], [12], [20], [20] та ін.). Це відповідає тому, що швидкість броунівської частинки необмежено зростає.

У [3] було встановлено, що в разі асимптотичного переходу від розв'язку $x(t)$ системи (3.1) для неоднорідного середовища рівняння для щільності розподілу невзаємодіючих броунівських частинок – розв'язок рівняння дифузії, що відповідає другому закону Фіка. Цей результат, очевидно, вирішує суперечку [15] про опис динаміки броунівських часток на користь рівнянь Іто, а не Стратоновича [3].

Звернемо увагу на те, що завдяки необмеженій варіації вінерівського процесу у класичних моделях (3.1) швидкості броунівських частинок можуть приймати які завгодно великі значення, однак хоча б з урахуванням висновків теорії відносності це неприпустимо. Розуміння цього [22] є мотивацією розгляду моделей динаміки броунівських частинок, коли їхня швидкість обмежена. У роботах [13] досліджувалось модель випадкового переміщення уздовж прямої, коли швидкість змінюється на протилежну у випадкові моменти часу. Надалі з'явилося багато робіт [16; 19; 35], пов'язаних із переносом цієї схеми на багатомірний випадок. Є роботи, пов'язані, наприклад, із моделюванням поширення світла в мутних середовищах, частіше на основі представлення про випадкові кути повороту вектора швидкості: наприклад, модель із роботи [24] та модель із розділу 1 цієї роботи.

Розглянемо нетрадиційну модель динаміки броунівської частинки. В основу цієї моделі покладені висновки теорії перших інтегралів для стохастичних рівнянь (1978 р.) [1].

Підкреслимо, що для великих швидкостей частинки за напрямом її руху зменшується інтенсивність відхилень від усередненого впливу. У той же час при русі в просторі розмірності вище двох інтенсивність впливів, перпендикулярних напряму руху частки, не залежить від її швидкості [21] (аналогія – «переміщення під дощем»). Це обґрунтовує розгляд моделей із поділом випадкових впливів на швидкість руху броунівської частки: за напрямом її руху та перпендикулярних йому.

У роботі [10] розглянуто рівняння Ланжевена з ортогональними випадковими впливами на швидкість броунівської частинки та побудовано характеристичне рівняння для процесу $\{\mathrm{v}(t), x(t)\}$:

$$\begin{cases} d\mathrm{v}(t) = -a(t)\mathrm{v}(t)dt + \dfrac{b(t)}{|\mathrm{v}(t)|}\left[\mathrm{v}(t) \times d\mathrm{w}(t)\right], \\ dx(t) = \mathrm{v}(t)dt, \quad \mathrm{v}(t),\ x(t) \in R^3. \end{cases} \quad (3.2)$$

У припущенні незалежності $x(0)$ і $\mathrm{v}(0)$ рівняння для щільності розподілу

$$\rho(t,x/\mathrm{v}(0))=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(t,x/y;\mathrm{v}(0))\rho(y)dy_1dy_2dy_3,$$

при сталих значенннях коефіцієнтів a і b є таким:

$$\frac{\partial^2\rho(t,x/\mathrm{v}(0))}{\partial t^2}+a\frac{\partial\rho(t,x/\mathrm{v}(0))}{\partial t}=$$
$$3^{-1}|\mathrm{v}(0)|^2[1-\exp\{-3at\}]\nabla_x^2\rho(t,x/\mathrm{v}(0))+ \quad (3.3)$$
$$+\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\mathrm{v}_l(0)\mathrm{v}_j(0)\frac{\partial^2\rho(t,x/\mathrm{v}(0))}{\partial x_l\partial x_j}$$

Були досліджені властивості розв'язків рівняння (3.3) при різних співвідношеннях між коефіцієнтами:

– $a=\tilde{a}\varepsilon^{-1},\ b=\tilde{b}\varepsilon^{-1},\ \varepsilon\to 0$,

– $a=\varepsilon a_0,\ b^2/\varepsilon a_0=|\mathrm{v}(0))|^2=const,\ \varepsilon\to 0$,

де $\tilde{a},a_0,\tilde{b}$ – обмежені величини.

У першому випадку (дифузійне наближення) спостерігається уповільнення процесу дифузії за напрямом $\frac{\mathrm{v}(0)}{|\mathrm{v}(0)|}$. У другому (випадок слабких взаємодій із середовищем) – щільність ймовірності розподілу ансамблю частинок апроксимується розв'язком хвильового рівняння.

Рівняння характеристичної функції для $\rho(t;x/\mathrm{v}(0))$, коли a та b постійні величини, і $b^2/a=|\mathrm{v}(0))|^2=const$, таке:

$$\frac{d^2\psi(t;\lambda)}{dt^2}+a\frac{d\psi(t;\lambda)}{dt}= \quad (3.4)$$
$$=-|\lambda|^2 f(t)\cdot\psi(t;\lambda)-(\lambda,V)^2\psi(t;\lambda),$$

де $V=V(0)$ – початкове значення швидкості частки, a – коефіцієнт «стоксового тертя», (розмірність t^{-1}), і $f(t)=\frac{|V|^2}{3}(1-e^{-3at})$.

Ці умови відповідають тому, що початкове значення $\mathrm{v}(0)=V$ знаходиться на поверхні стійкості для процесу $\mathrm{v}(t;0)$. Зберігаємо припущення незалежності $x(0),\mathrm{v}(0)$.

Для рівняння (3.4) існує розв'язок. Доведення цього твердження наведено в [11].

Теорема 1. *Загальний розв'язок* $\psi(t)$ рівняння (4.4) за умови, що $|\lambda|\in\left[0,a\frac{2\sqrt{3}}{|V|}\right]$, є таким:

$$\psi(t)=C_1F_\upsilon(t)e^{-\frac{[1+3\upsilon]at}{2}}+C_2F_{-\upsilon}(t)e^{-\frac{[1-3\upsilon]at}{2}},$$

де $\upsilon=\frac{1}{3a}\sqrt{a^2-4\beta^2}$ $(\upsilon\ge 0)$,

$$F_{\pm\upsilon}(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[p\cdot\eta(t)]^{2m}}{\Gamma(m\pm\upsilon+1)m!},\ \eta(t)=e^{-\frac{3at}{2}},\ p=\frac{\alpha}{3a}\ge 0,$$

$$\alpha^2=\frac{|\lambda|^2|V|^2}{3},$$

$\Gamma(m\pm\upsilon+1)$ – гама функція, а C_1 і C_2 – розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{cases}C_1F_\upsilon(0)+C_2F_{-\upsilon}(0)=\mathrm{M}[\exp\{\mathrm{i}(\lambda,x(0))\}]\\ C_1\frac{\partial e^{-\frac{[1-3\upsilon]at}{2}}F_\upsilon(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}+C_2\frac{\partial e^{-\frac{[3\upsilon+1]at}{2}}F_{-\upsilon}(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\\ \qquad=-\mathrm{i}(\lambda,\mathrm{v}(0))\mathrm{M}[\exp\{\mathrm{i}(\lambda,x(0))\}]\end{cases}$$

Теорема 2. *Загальний розв'язок* $\psi(t)$ рівняння (4.4) для значень $|\lambda|\notin\left[0,a\frac{2\sqrt{3}}{|V|}\right]$, є таким:

$$\psi(t)=e^{-\frac{at}{2}}\cdot[C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)],$$
$$\varphi_1(t)=\Phi_1(t,\gamma)\cdot\cos(\sigma-\mu t)+\Phi_2(t,\gamma)\cdot\sin(\sigma-\mu t),$$
$$\varphi_2(t)=\Phi_1(t,\gamma)\cdot\sin(\sigma-\mu t)-\Phi_2(t,\gamma)\cdot\cos(\sigma-\mu t).$$

де $\sigma=\gamma\ln p$, $\mu=3a\gamma$, $\gamma=\frac{1}{3a}\cdot\sqrt{4\beta^2-a^2}>0$,

$p=\frac{|\lambda||V|}{3a\sqrt{3}}$, $\beta^2=\frac{|\lambda|^2|V|^2}{3}+(\lambda,V)^2$,

$$\Phi_1(t,\gamma)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[p\cdot\eta(t)]^{2m}\cdot Q_1(\gamma,m)}{m!\cdot[Q_1^2(\gamma,m)+Q_2^2(\gamma,m)]},$$

$$\Phi_2(t,\gamma)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[p\cdot\eta(t)]^{2m}\cdot Q_2(\gamma,m)}{m!\cdot[Q_1^2(\gamma,m)+Q_2^2(\gamma,m)]},$$

$$Q_1(\gamma,m)=\int_0^{\infty}\cos(\gamma\ln\tau)\cdot\tau^m\cdot e^{-\tau}d\tau,$$

$$Q_2(\gamma,m)=\int_0^{\infty}\sin(\gamma\ln\tau)\cdot\tau^m\cdot e^{-\tau}d\tau,$$

де C_1 і C_2 – розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{cases}[C_1\varphi_1(0)+C_2\varphi_2(0)],\ =\mathrm{M}[\exp\{\mathrm{i}(\lambda,x(0))\}/V]\\ C_1\frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}+C_2\frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\\ =-[\mathrm{i}(\lambda,\mathrm{v}(0))-\mathrm{a}2^{-1}]\mathrm{M}[\exp\{\mathrm{i}(\lambda,x(0))\}/V].\end{cases}$$

Теореми 1, 2 показують, що в спектрі характеристичної функції, що є розв'язком (3.4), присутня область коливних складників для будьяких значень парметров a і b, за умови, що $b^2/a=|\mathrm{v}(0)|^2=const$. Це підтверджує висновок про те, що еволюція ансамблю броунівських часток, траєкторії яких є розв'язком рівнянь Ланжевена з ортогональнми збуреннями, пов'язана з коливними прцесами. Таким чином, для цієї моделі динаміки броунівської частинки ансамбль броунівських частинок – це потік із хвильовими властивостями. Ці результати узгоджуються з висновками роботи [10].

4. Використання різних представлень стохастичних рівнянь.

Як і вище, динаміку системи моделюємо за допомогою стохастичних диференціальних рівнянь. Включення випадкових збурення в динамічні рівняння розглядається як метод, що дає змогу замінити безліч взаємодій із навколишніми системами такими ефективними випадковими процесами, які забезпечать виконання принципу погодженості: збіг середніх характеристик, що мають аналоги на макрорівні.

Є різні представлення стохастичних рівнянь, і пов'язано це не тільки з вибором розподілу збурюючого процесу, але і з характером його впливу на динаміку щодо поточного моменту часу. У класичній теорії динамічних систем, вибір околу t не відіграє ролі. Але в процесі переходу до моделювання дисипативних систем ця вимога стає істотним додатковим обмеженням у виборі класу рівнянь для моделювання реальних явищ. Вибір може бути виконаний тільки на основі конкретних представлень про реальний процес, що моделюється.

Між різними представленнями стохастичних рівнянь, виходячи, наприклад, із вимоги збіжності в середньоквадратичному розв'язку для різних представлень можна встановити взаємозв'язок. Це дає змогу вибрати рівняння з огляду на представлення про реальний процес, а потім перейти до представлення, яке зручніше для виконання досліджень.

Аналітичний зв'язок між коефіцієнтами рівняння Іто

$$dx_i(t) = a_i(t)dt + \sum_{k=1}^{m} b_{i,k}(t)dw_k(t),\ x(0) = x \in R^n,$$

де $dw_k(t)$ – випереджальні щодо поточного моменту часу t збільшення незалежних вінерівських збурень $w_k(t)$, і Стратоновича:

$$dx_{i,s}(t) = \bar{a}_i(t)dt + \sum_{k=1}^{m} \bar{b}_{i,k}(t)d\bar{w}_k(t),\ x_s(0) = x,$$

де прирости $d\bar{w}_k(t)$ – симетричні щодо поточного моменту часу t, є такими:

$$b_k(t) = \bar{b}_k(t),$$

$$a_i(t) = \bar{a}_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{j,k}(t)\frac{\partial b_{i,k}(t)}{\partial x_j}, \quad (4.1)$$

Вибір одного з представлень істотний для правильного відображення і трактування явищ та процесів у реальних системах.

Продемонструємо це на модельному прикладі рівняння динаміки електрона з урахуванням взаємодії з власним полем, побудованого Лоренцем:

$$\varepsilon d(\frac{d}{dt}\upsilon(t)) = \frac{d\upsilon(t)}{dt}dt - \frac{1}{m_э}F(t)dt, \quad (4.2)$$

де $\upsilon(t) \in R^1$ – швидкість електрона, $F(t)$ – поле зовнішніх сил, ε – малий параметр, $m_э$ – ефективна маса електрона [14].

Розв'язок рівняння (4.2) веде до відомого парадокса самоприскорення електрона [9]. Виключення цього ефекту можливе, якщо змінити знак при $\frac{d\upsilon(t)}{dt}$ в (4.2):

$$\varepsilon d(\frac{d}{dt}\upsilon(t)) = -\frac{d\upsilon(t)}{dt}dt - \frac{1}{m_э}F(t)dt$$

Мотиви такого переходу наведені в [9].

Покажемо, як ефект самоприскорення можна виключити, якщо додати у (4.2) шум вакууму. Вважаємо, що шум – вінерівський процес. Припустимо, що цей вплив щодо поточного моменту t відображається на основі рівняння Стратоновича:

$$\varepsilon d(\frac{d}{dt}\upsilon(t)) = \frac{d\upsilon(t)}{dt}dt - \frac{1}{m_э}F(t)dt + b(t)d\bar{w}(t), \quad (4.3)$$

Перехід від (4.3) до представлення Іто з урахуванням взаємозв'язку між коефіцієнтами рівнянь Іто і Стратоновича (4.1) приводить до рівняння:

$$\begin{aligned}\varepsilon d(\frac{d}{dt}\upsilon(t)) &= \frac{d\upsilon(t)}{dt}dt - \frac{1}{m}F(t)dt + \\ &+ 2^{-1}\frac{1}{\varepsilon}b(t)\frac{\partial b(t)}{\partial(\frac{d\upsilon(t)}{dt})} + b(t)dw(t),\end{aligned} \quad (4.4)$$

Від'ємність коефіцієнта при $\frac{d\upsilon(t)}{dt}$ в (4.4), можна забезпечити вимогою:

$$\frac{d\upsilon(t)}{dt} + \frac{1}{4\varepsilon}\frac{\partial b^2(t)}{\partial(\frac{d\upsilon(t)}{dt})} = -\eta\frac{d\upsilon(t)}{dt}, \eta > 0.$$

Наприклад, виберемо $b^2(t) = f(u) \le 1$, $u = [1 + \gamma(\frac{d\upsilon(t)}{dt})^2]^{-1}, \gamma > 0$. Тоді

$$\frac{d\upsilon(t)}{dt}[1 - \frac{1}{2\varepsilon}\gamma\frac{1}{(1+\gamma(\frac{d\upsilon(t)}{dt})^2)^2}\frac{\partial f(\cdot)}{\partial u}] = -\eta\frac{d\upsilon(t)}{dt}.$$

Нехай

$$\frac{1}{(1+\gamma(\frac{d\upsilon(t)}{dt})^2)^2}\frac{\partial f(\cdot)}{\partial(1+\gamma(\frac{d\upsilon(t)}{dt})^2)^{-1}} = 1$$

Цю рівність забезпечує функція

$$f(\cdot)=3^{-1}(1+\gamma(\frac{d\upsilon(t)}{dt})^2)^{-3}.$$

Рівняння (4.4) у цьому разі переходить у таке:

$$\varepsilon d(\frac{d}{dt}\upsilon(t))=-\eta\frac{d\upsilon(t)}{dt}dt-\frac{1}{m_э}F(t)dt+b(t)dw(t),\ \eta>0,$$

де $-\eta=(1-\frac{1}{2\varepsilon}\gamma)<0$.

Ця умова буде виконана, якщо $\gamma>2\varepsilon$. Можна взяти, наприклад, $\gamma=2C\varepsilon, C>1$.

Вимога $\varepsilon^{0.5}M[|\frac{d}{dt}\upsilon(0)|^2]<const$, обмеженість $|b(t)|, \frac{1}{m_э}|F(t)|,\ \forall t\ge 0$ ведуть до обмеженості $\varepsilon^{0.5}M[|\frac{d}{dt}\upsilon(t)|^2],\forall t\ge 0$. Доведення ґрунтується на можливості точного представлення розв'язку рівняння для $\varepsilon^{0.5}M[|\frac{d}{dt}\upsilon(t)|^2]$, яке отримуємо за допомогою формули Іто.

Таким чином, парадокс (самоприскорення електрона під дією власного поля) не виникає.

Підкреслимо, це модельний приклад. Стверджувати, що саме таким є вплив поля вакууму на електрон, проблематично.

Висновки. Сучасна теорія стохастичних рівнянь дає змогу описувати випадкові процеси обмеженої варіації, виконувати дослідження, спираючись не тільки на середні показники, а й працювати з реалізаціями процесів. Розглянуті моделі вказують на практичну цінність висновків теорії, оскільки доводять можливість використання та забезпечення вимог збереження для відкритих систем в умовах сильних збурень, навіть для систем з обмеженим числом компонент.

Список літератури:

1. Дубко В.А. Первый интеграл системы стохастических дифференциальных уравнений. 1978. 28 с. (Препринт 78.27. Ин-т математики АН УССР, Киев).
2. Дубко В.А. Понижение порядка системы стохастических дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. *Теория случайных процессов*. 1980. № 8. С. 35–41.
3. Дубко В.А. Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. Владивосток : ДВО АН СССР, 1989. 185 с.
4. Дубко В.А. Метод диффузионной аппроксимации в исследовании и построении моделей стохастических динамических систем. Владивосток : Дальнаука, 1994. 107 с.
5. Дубко В.А. Интегральные инварианты, первые интегралы и притягивающие многообразия системы стохастических дифференциальных уравнений для одного класса стохастических дифференциальных уравнений. *Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложение.* Сборник науч. труд. НАН Украины. Ин-т математики**.** Киев, 1998. С. 87–90.
6. Дубко В.А., Чалых Е.В. Динамика цепи конечных размеров с бесконечным числом звеньев в R^2: 1998. 18 с. (Препринт. Ин-т прик. мат. ДВО РАН, Владивосток, Хабаровск: Дальнаука).
7. Дубко В.А. Моделирование динамики реальных систем. *III международная конференция «Эколого-географические проблемы природопользования нефтегазовых регионов Нижневартовск»*: Сборник докл. НГГУ. 2006. С. 16–20.
8. Дубко В.А., Карачанская Е.В. Классификация и моделирование случайных гармоничных процессов на основе SHCS = рядов. *Математические заметки ЯГУ*. 2011. Т. 18.1. С. 36–54.
9. Дубко В.А. Уравнения Ланжевена согласованные с классическими и неклассическими моделями диффузии. *Вісник АМУ, серія «Техніка».* 2015. Вип. 2(10). С. 34–46.
10. Дубко В.А. Ободной модели диффузии с постоянной скоростью. *Математические заметки СВФУ*. 2019. Т. 25.1. С. 31–44.
11. Дубко В.А., Зубарев С.Н., Карачанская Е.В. Построение решения характеристического уравнения для модели диффузии Ланжевена с ортогональными возмущениям, 2021. 11 с. URL: https://arxiv.org/pdf/2102.07496.pdf
12. Ильин Л.Н., Хасминский Р.З. Об уравнениях броуновского движения. *Теория вероятностей и ее применение*. 1964. Т. 91. С. 466–491.
13. Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики. Москва : «Наука», 1967. 176 с.
14. Климонтович Ю.Л. К статистическому обоснованию уравнения Шредингера. *ТМФ.* 1993. Т. 97, № 1. С. 3–26.
15. Климонтович Ю.Л. Нелинейное броуновское движение. *УФН*. 1994. Т. 164. № 8. С. 811–844.
16. Колесник А. Д., Турбин А. Ф. Симметричные случайные эволюции в R^2. *Докл. АН Украины*. 1990. № 2. С. 10–11.
17. Ланжевен П. Избранные труды. Москва : Изд-во АН СССР Наука. 1964. 567 с.

18. Лоренц Г.А. Теория электронов и ее применение к явлениям светового и теплового излучения. Москва : Гл.-лит. технико-теоретической лит. 1953. 370 с.

19. Орсингер Э., Колесник А. Точное распределение в модели случайного движения на плоскости, управляемого гиперболическим уравнением четвертого порядка. *Теор. вероятн. и ее примен*. 1996. Т. 41. № 2. С. 451–459.

20. Скороход А.В. Об усреднении стохастических уравнений математической физики. *Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний.* Киев : Наук. думка, 1977. С. 196–208

21. Скороход А.В. Стохастические уравнения системы многих частиц. *Математические методы в биологии*. Киев : Наук. думка. 1977. С. 38–53.

22. Турбин А.Ф. Одномерный процесс броуновского движения – альтернатива модели А. Эйнштейна – Н. Винера – П. Леви. *Фрактальний аналіз та суміжні питания*. 1998. № 2. С. 47–60.

23. Хасминский Р.З. О принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений Ито. *Kybernetika, Clcloboa* 3, 1968. Т. 4. С. 260–279.

24. Francisco J. Sevilla, Luis A. Gomez N. Theory of diffusion of active particles that move at constant speed in two dimensions. *Phys. Rev*. E 90, 022130. Published 25 August 2014.

25. E. Orsinger, R. Garra and A. I. Zeifman. Cyclic random motions with orthogonal directions (2019). URL: https://arxiv.org/pdf/1912.12625.pdf

Doobko V.A. NON-CLASSICAL MODELS OF STOCHASTIC DYNAMICAL SYSTEMS

The article considers models of random processes that differ from traditional ones. The scope of their application in modeling real processes, phenomena and systems, taking into account the requirement of limited variation of processes. The modern theory of stochastic differential equations provides a possibility to model stochastic processes of bounded variation not only on average but also on their realizations. This possibility is demonstrated on the example of an oriented chain fixed at an initial point. The formulated theorem shows the connection between discrete and continuous chain models. Examples of the appearance of first integrals for stochastic systems are given and the possibility of stability of the attracting manifold is indicated. The importance and examples of the application of the Langevin principle in the construction of equations of stochastic dynamics are emphasized. For the Langeven model of dynamics of a Brownian particle with orthogonal random effects to its velocity, in the mode when the modulus of initial velocity of the particle is on a manifold which is, as was found earlier, attractive, the equation for the density of particle distribution is given. The peculiarities of behavior of solutions of this equation depending on the relation between the coefficient of Stokes friction and under Wiener perturbations orthogonal to the velocity are considered. The presence of oscillatory processes for an ensemble of particles is noted. An explicit solution for the characteristic function for the particle position density is presented. It is shown that the spectrum of a characteristic function contains areas of continuous values representing an oscillatory process and an area with no oscillations. These results support the conclusion that the model of the dynamics Brownian particle constructed on the basis of the unconventional physical interpreting of the Langeven equations, as stochastic equations with orthogonal influences, leads to the treatment of the ensemble of Brownian particles as a system possessing wave properties. The role of the choice of the type of the stochastic differential equation, in particular Stratonovich rather than Ito, is demonstrated on the example of exclusion, related to the mathematical model of Lorenz, the paradox of self-acceleration of the electron interacting with its own field.

Key words: *limited variations, model of Lorenz, stochastic equation, orthogonal influences, oriented chain.*